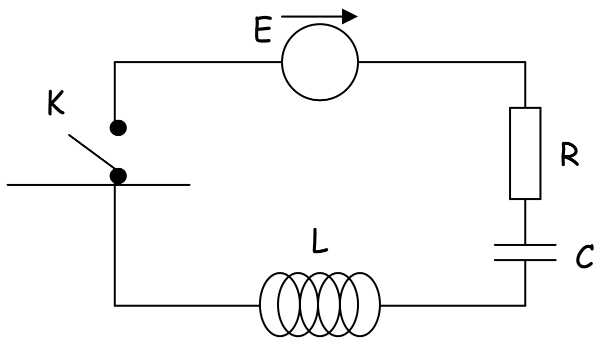
CIRCUITS RLC (corrigé)

Exercice 1 : Etude d'un circuit RLC en transitoire

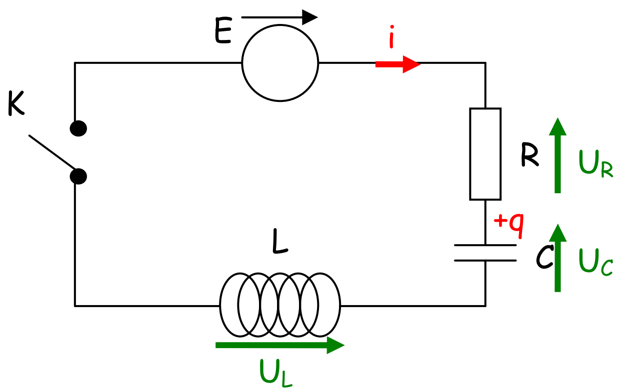


On considère le circuit suivant :

Le générateur est considéré comme parfait de f.é.m. E.
Initialement la bobine n'est traversée par aucun courant, et le condensateur C est déchargé.

A t = 0 on ferme l'interrupteur K.

1. Reproduire le circuit en plaçant les conventions.



2. Ecrire l'équation différentielle que vérifie q(t) la charge du condensateur C.

E = UL + UC + UR

$$E = L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri$$

$$E = L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt}$$

L'équation différentielle que vérifie q(t) la charge du condensateur C est donc :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L}$$

3. Ecrire l'équation différentielle que vérifie i(t) l'intensité du courant qui traverse L.

On dérive :

$$E = L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri$$

On obtient : $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$

4. Donner une relation entre R,L et C pour que le régime du circuit soit « critique ».

Pour que le régime soit critique, il faut que dans l'équation :

$$\underbrace{\frac{d^2q}{dt^2}}_{a\,=\,1} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{b}\frac{dq}{dt} + \underbrace{\frac{q}{LC}}_{c} - \frac{E}{L} = 0$$

on aie : $b^2 - 4ac = 0$ $(\Delta = 0)$

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 = 4ac = 4 \times \frac{1}{LC}$$

$$R^2 = \frac{4L^2}{LC}$$

$$\boxed{R^2 = \frac{4L}{C}}$$

5. Quelle doit être la condition entre R, L et C pour que le régime soit pseudo-périodique ? Dans ce cas, donner les expressions de la pseudo-pulsation ω, de la pseudo-fréquence f et de la pseudo-période T. On indiquera à cette occasion les unités de ω, f et T.

Pour que le régime soit pseudo-périodique, il faut avoir : $b^2 - 4ac < 0$

Donc il faut que $\boxed{R^2 < \frac{4L}{C}}$

La pseudo-pulsation est alors de $\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

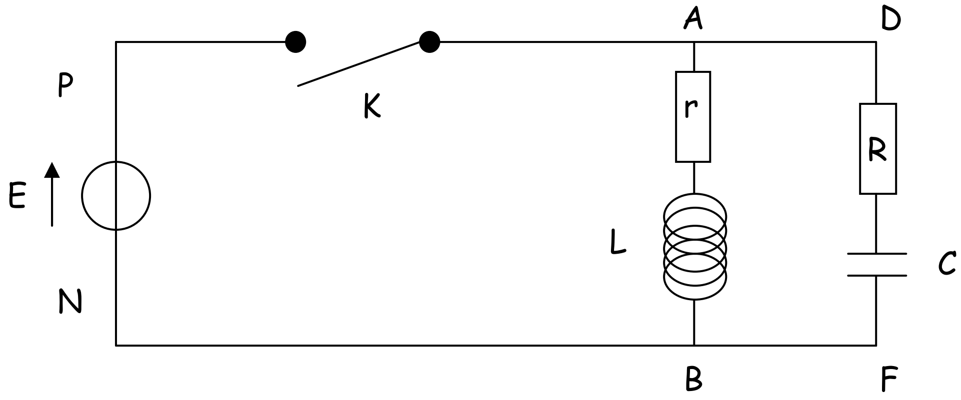
Donc $\boxed{\omega = \frac{\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}}{2} \quad \text{(en rad/s)}}$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad = \quad \boxed{f = \frac{\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}}{4\pi} \quad \text{(en Hz)}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} \quad = \frac{4\pi}{\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}} \quad \text{(en s)}}$$

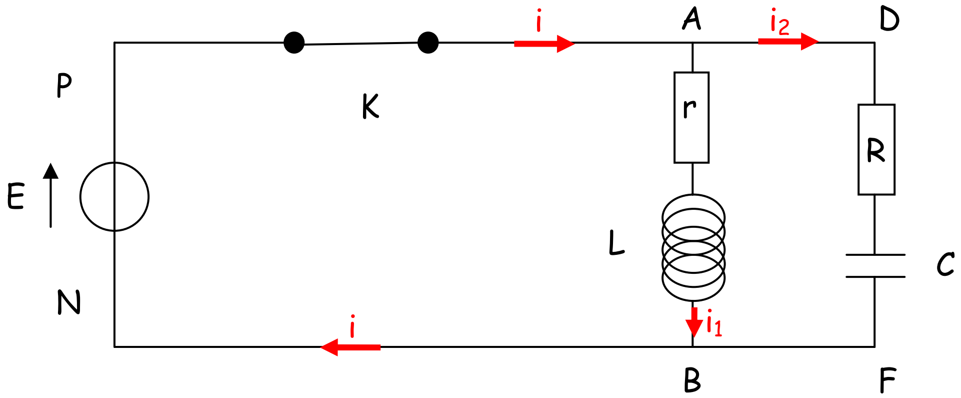
Exercice 2 : Circuit en régime variable

Le montage suivant est alimenté par un générateur de tension continu idéal de f.é.m. E constante. A l'instant t = 0 où l'on ferme l'interrupteur K, le condensateur est totalement déchargé et aucun courant ne circule dans le réseau.



On donne : R = 10 kΩ   C = 0,1 μF   r = 1 kΩ   L = 2 H   E = 10 V

1. Donner les équations différentielles :
   1.1. vérifiée par i(t) l'intensité qui traverse la bobine.



L'équation différentielle vérifiée par $i_1(t)$ l'intensité qui traverse la bobine est :

$$E = ri_1 + L\frac{di_1}{dt} \quad \text{donc} \quad \frac{di_1}{dt} + \frac{r}{L}i_1 - \frac{E}{L} = 0$$

   1.2. vérifiée par q(t) la charge du condensateur.

L'équation différentielle vérifiée par q(t) la charge du condensateur est :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} - \frac{E}{R} = 0$$

2. Déterminer alors :

2.1. l'expression de $i(t)$ l'intensité qui traverse la bobine.

- Soit i une fonction constante on aura alors :
  $ri_{1p} = E/L$ donc $i_{1p} = E/r$
- Si $E = 0$, on aura $i_{1s} = ke^{-rt/L}$
- $i_1(t) = i_{1p} + i_{1s} = E/r + ke^{-rt/L}$
  Or à $t = 0$, on a $i = 0$ donc $i_1(0) = 0 = E/r + k$
  Alors $k = -E/r$
- Conclusion : l'expression de $i(t)$ l'intensité qui traverse la bobine est :
  $\boxed{i_1(t) = E/r(1 - e^{-rt/L})}$

2.2. l'expression de $q(t)$ la charge du condensateur.

- Soit q une fonction constante, on a donc :
  $\frac{q_p}{RC} = E/R$ donc $q_p = EC$
- Si $E = 0$, on aura $q_s = ke^{-t/RC}$
- $q(t) = q_p + q_s = EC + ke^{-t/RC}$
  Or à $t = 0$, $q = 0$ donc $q(0) = 0 = EC + k$
  Alors $k = -EC$
- Conclusion : l'expression de $q(t)$ la charge du condensateur est :
  $\boxed{q(t) = EC(1 - e^{-t/RC})}$

3. En déduire alors :

3.1. l'expression de $i_2(t)$ l'intensité qui traverse le condensateur.

On sait que $i_2(t) = \frac{dq(t)}{dt}$

On dérive donc $q(t)$:

$i_2(t) = q'(t) = EC(1 – (-1/RC)e^{-t/RC})$
$i_2(t) = EC\ (1 + (1/RC)\ e^{-t/RC})$ soit $\tau = RC$
$i_2(t) = EC(1 + (1/\tau)e^{-t/\tau})$

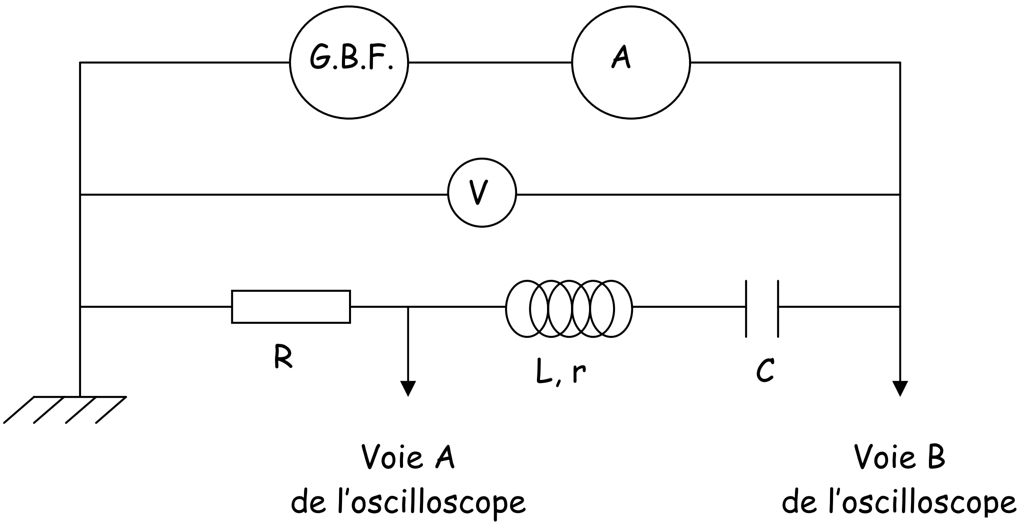
3.2. l'expression de $i(t)$ l'intensité débitée par le générateur.

Comme on a $i(t) =$

3.3. le tracé de $i(t)$.

<u>Exercice 3</u> : Questionnaire à choix multiples

Soit un dipôle R, L, C constitué d'un résistor de résistance R = 20 Ω, d'une bobine d'inductance L = 0,5 H et de résistance r = 10 Ω et d'un condensateur de capacité C = 10 µF associés en série et alimentés par un G.B.F. dont on peut régler la fréquence et la tension de sortie. Un ampèremètre, un voltmètre sont correctement installés dans le circuit. Un oscilloscope permet de visualiser la tension aux bornes du dipôle et l'intensité du courant dans le circuit. Le G.B.F. délivre une tension alternative sinusoïdale de fréquence N. Le circuit est schématisé ci-dessous :



On rappelle les notations usuelles :

- valeur efficace : symbole en majuscule,
- valeur instantanée : symbole en minuscule.

Recopier la seule bonne réponse pour chacune des questions qui suit et justifier cette réponse quand c'est demandé.

1. Le voltmètre permet de connaître :
   a) la valeur maximum de la tension
   b) la valeur efficace de la tension
   c) la valeur instantanée de la tension

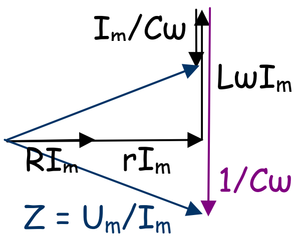
2. La valeur instantanée de l'intensité est connue à partir de :
   a) la voie A de l'oscilloscope
   b) la voie B de l'oscilloscope
   c) l 'ampèremètre
   Justifier.

Car l'oscilloscope permet de visualiser les variations de l'intensité en fonction du temps aux bornes de R. Néanmoins, on visualisera la tension mais comme $u = Ri$, on a $i = u/R$; R étant constant.

3. L'impédance du dipôle :
   a) est indépendante de la fréquence N de la tension d'alimentation,
   b) augmente avec cette fréquence,
   c) varie avec cette fréquence,

   Justifier.

   Car on a :



Soit :

- $Z^2 = (1/C\omega - L\omega)^2 + (R + r)^2$

  Donc $Z = \sqrt{(1/C\omega - L\omega)^2 + (R + r)^2}$

Ou :

- $Z = \sqrt{(L\omega - 1/C\omega)^2 + (R + r)^2}$

Comme $\omega = 2\pi N$, on a donc Z qui varie avec la fréquence N d'alimentation.

4. Lorsque la fréquence de la tension d'alimentation est N = 100Hz l'impédance vaut :
   a) $Z = 158\ \Omega$
   b) $Z = 30\ \Omega$
   c) $Z = 273\ \Omega$

   Justifier.

$$Z = \sqrt{(L2\pi N - 1/C2\pi N)^2 + (R + r)^2}$$

$$Z = \sqrt{(0,5 \times 2\pi \times 100 - 1/(2\pi \times 100 \times 10.10^{-6})^2 + 30^2}$$

$$Z = 158\ \Omega$$

5. L'impédance peut aussi être mesurée par :
   a) U/I
   b) I/U
   c) u/i

6. Le régime imposé est celui :
   a) d'oscillations libres amorties,
   b) d'oscillations libres entretenues,
   c) d'oscillations forcées.

   Justifier.

   Car il y a un générateur avec le circuit RLC.

7. La résonance d'intensité se manifeste quand :
    a) u et i sont en phase,
    b) u_c et u_b (respectivement tension instantanée aux bornes du condensateur et de la bobine) ont la même valeur,
    c) u_b et i sont en phase.

8. La résonance a lieu pour une fréquence de :
    a) 204 Hz
    b) 113 Hz
    c) 71,2 Hz

    Justifier.

    La résonance a lieu ; on a alors $L\omega = 1/C\omega$ donc $LC\omega^2 = 1$

    Alors $\omega = 1/\sqrt{LC}$

    Or $f = \omega/2\pi$ donc $f = 1/(2\pi\sqrt{LC})$

    $f = 1/(2\pi\sqrt{0,5 \times 10.10^{-6}})$

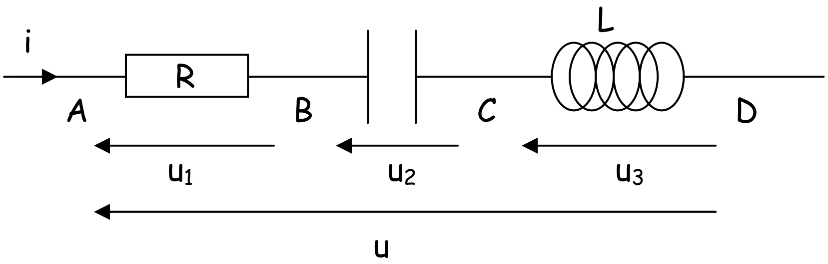
    $f = 71,2$ Hz

9. La puissance moyenne consommée par ce dipôle est $P = U.I.\cos\varphi$ (φ déphasage entre u et i). A la résonance :
    a) $P = U.I.$
    b) $P = U_{max}.I_{max}.$
    c) $P = u.i.$

10. La puissance consommée l'est essentiellement :
    a) par effet Joule,
    b) par l'apparition d'un champ magnétique dans la bobine,
    c) par l'apparition d'un champ électrique dans le condensateur.

Exercice 4 : Questionnaire à choix multiples

Chacune des propositions a, b, c contient une seule affirmation vraie.
Recopier chacune de ces affirmations vraies sur la copie.



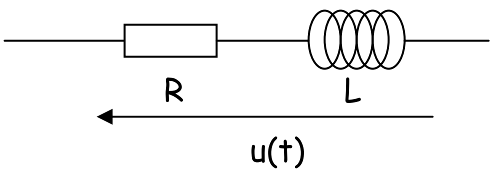
1. Pour le dipôle R.L.C. série représenté ci-dessus, parcouru par un courant sinusoïdal, la relation vérifiée par les tensions est :
   a) $U = U_1 + U_2 + U_3$,
   b) $u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$,
   c) $U_{max} = U_{1\,max} + U_{2\,max} + U_{3\,max}$.

2. On applique à un dipôle AB, la tension sinusoïdale $u_{AB}(t) = 380 \sin(200\pi t + \pi/3)$ (u en V et t en s).

   2.1. La valeur efficace de la tension est :
   a) 537 V,
   b) 380 V,
   c) 268,7 V.

   2.2. La période T de cette tension vaut :
   a) 628 s,
   b) 100 s,
   c) 10 ms.

3. Soit le dipôle suivant alimenté par la tension $u(t) = 20\sqrt{2}\cos(100\,\pi t + \pi/2)$ (u en V et t en s).



$R = 70\ \Omega$ $L = 1\ H$ $C = 10\ mF$

3.1. L'impédance du dipôle est :

a) supérieure à 100 Ω,

b) égale à 100 Ω,

c) inférieure à 100 Ω.

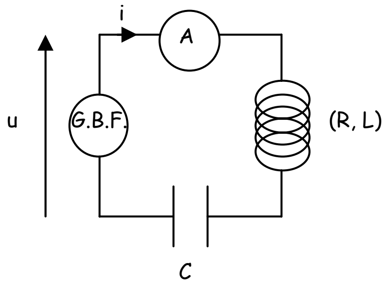
3.2. La tension u est :

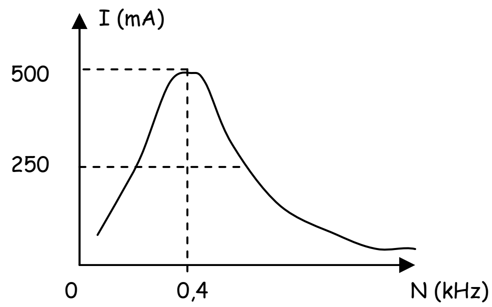
a) en avance de phase par rapport à l'intensité i,

b) en phase avec i,

c) en retard de phase par rapport à i.

4. Dans le circuit représenté ci-dessous, le générateur basse fréquence (GBF) crée entre ses bornes une tension sinusoïdale u de fréquence variable N et de valeur efficace 10 V.
L'intensité efficace, indiquée par l'ampèremètre de résistance négligeable, varie en fonction de la fréquence N selon la courbe suivante :





4.1. La résistance R de la bobine vaut :

a) 28,3 Ω,

b) 20,0 Ω,

c) 40,0 Ω.

4.2. Pour N = 400 Hz,

a) u est en avance de phase par rapport à i,

b) u est en phase avec i,

c) u est en retard de phase par rapport à i.

4.3. Pour N = 400 Hz,

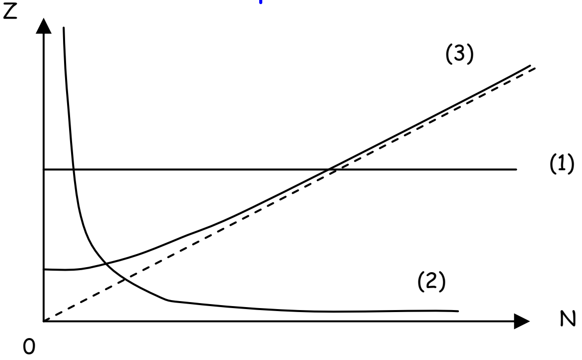
a) La tension aux bornes du condensateur est plus grande que la tension aux bornes de la bobine.

b) La tension aux bornes du condensateur est égale à la tension aux bornes de la bobine.

c) La tension aux bornes du condensateur peut être supérieure à 10 V.

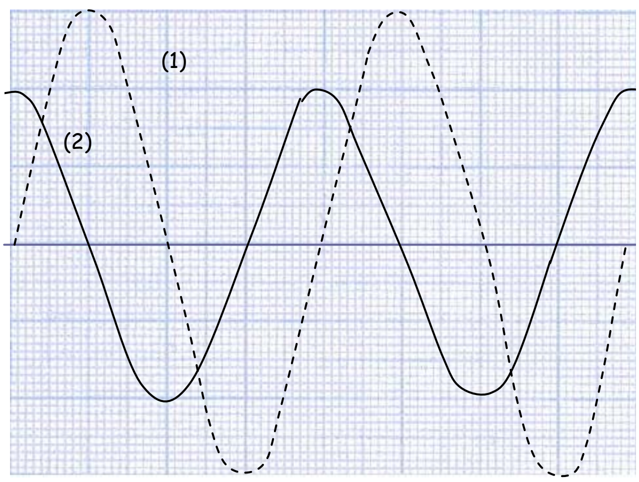
5. On a représenté sur un même schéma les variations de l'impédance Z de trois dipôles en fonction de la fréquence N de la tension sinusoïdale qui les alimente.
Ces dipôles sont respectivement :
- une résistance (R),
- une bobine (r, L),
- un condensateur (C).

Quelle est la courbe qui correspond aux variations de l'impédance d'une bobine en fonction de la fréquence :
a) courbe (1),
b) courbe (2),
c) courbe (3) ?



6. On observe l'oscillogramme obtenu avec les sensibilités suivantes :

courbe (1), voie Y_1 :
sensibilité verticale 0,5 V / cm ;
courbe (2), voie Y_2 :
sensibilité verticale 1 V / cm ;
base de temps : 5 ms / cm.



6.1. Le déphasage $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ de la tension (1) par rapport à la tension (2) vaut :
a) $+ \pi/2$,
b) $- \pi/2$,
c) π.

6.2. la valeur efficace de la tension (1) vaut :

a) 2,12 V,
b) 1,50 V,
c) 1,06 V.

6.3. La fréquence N de ces deux tensions sinusoïdales vaut :

a) 50 Hz,
b) 100 Hz,
c) 314 Hz.